**TURUNAN (DERIVATIF)**

Konsep turunan ( derivatif ) merupakan bagian kalkulus yang banyak diterapkan pada  berbagai bidang ilmu, misalnya fisika, teknik, biologi, kimia, pertanian, ekonomi, dll.

**1.1. Pengertian Turunan**

Definisi :

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f ′yang nilainya pada sembarang x diberikan oleh : 

f ′( x ) =

*f* (*x* + *h*) − *f* (*x*)

*Limh*

*h*→0 

asalkan limit ini ada. Jika limit ini ada, maka dikatakan fungsi ini terdiferensialkan di x.

**Arti Geometris Dari Turunan**

Perhatikan gambar berikut :

Tali Busur

y = f(x) 

f(x + h)

 f(x) 

~~P~~

Q 

f(x + h) – f(x) 

Garis  

singgung 

 x x + h

*Gambar 1*

Andaikan kurva pada Gambar 1 merupakan grafik dari y = f( x ), P dam Q merupakan sembarang  dua titik pada kurva tersebut dengan koordinat (x , f( x )) dan ( x + h, f(x + h )). Kemiringan atau  gradien tali busur PQ adalah :

*f* (*x* + *h*) − *f* (*x*)

mPQ = *h*

Jika h dibuat sangat kecil (h → 0), maka tali busur PQ mendekati garis singgung kurva y = f( x )  pada titik x. Jadi turunan fungsi f di x adalah gradien garis singgung kurva pada x. Turunan fungsi y = f( x ) di x = c didefinisikan sebagai : 

f ′( c ) =

*f* (*c* + *h*) − *f* (*c*)atau f ′( c ) =  *Limh*

*Lim*

*f x f c* ( ) − ( ) 

→ *x c*

*h*→0

Seperti terlihat pada Gambar 2 berikut ini : y = f(x)

*x c*

**Tali Busur

− 

f( x )

f( c )

**Gambar 2**

Contoh 1 :

Q

~~P~~ 

 c x

f( x ) – f( c ) Garis  

singgung 

Tentukan gradien garis singgung kurva y = -x2 + 2x + 2 pada x = 1/ 2.  Jawab :

m = f ′( ½ )

KALKULUS I-ILKOM 1 

=   =   =

*f* (1/ 2 + *h*) − *f* (1/ 2)

*Limh*

*h*→0

2 2

[ (1/ 2 *h*) 2(1/ 2 *h*) 2] [ (1/ 2) 2(1/ 2) 2]

− + + + + − − + + *Limh*

*h*→0

[( 1/ 4 *h h* 1 2*h* 2) ( 1/ 4 1 2)] 2

− − − + + + − − + + 

=

*Limh h*→0

2= 1.

− *h* + *h*

*Limh*

*h*→0 

Jadi gradien garis singgung yang melalui x = ½ adalah 1.

Lambang – lambang lain untuk menyatakan turunan fungsi y = f( x ) terhadap x adalah : Dx f( x )  atau dxdyyang dibaca dy dx.

Suatu hasil yang sangat menakjubkan bahwa suatu fungsi yang terdiferensialkan di x = c  pasti kontinu di titik itu. Tetapi sebaliknya belum tentu berlaku, yaitu fungsi yang kontinu pada titik x  = c belum tentu terdiferensialkan di titik itu. hal ini dapat dilihat pada contoh berikut ini . Contoh 2 :

Misalkan diberikan fungsi f( x ) =  x selidiki keterdiferensialan fungsi tersebut di x = 0. Jawab :

Fungsi ini jelas kontinu di x = 0, tetapi tidak terdiferensialkan di x = 0, sebab berdasarkan  definisi :

 x 0 

−= -1 dan

*Lim*x 0

−

 x 0

−= 1

*Lim*x 0 

Jadi

→ −

*x* 0

 x 0

−tidak ada.

*Lim*x 0

→ + *x* 0

− 

*x*→0

− 

Dengan contoh ini dapat disimpulkan bahwa di sembarang titik dimana fungsi mempunyai sudut  yang tajam, maka fungsi kontinu tetapi tidak terdiferensialkan di titik itu.

**Aturan Mencari Turunan Fungsi**

1. Jika f( x ) = k dengan k suatu konstanta, maka f ′( x ) = 0 ;

2. Jika f( x ) = x, maka f ′( x ) = 1 ;

3. Jika f( x ) = x n, dengan n adalah bilangan bulat atau rasional, maka f ′( x ) = nx n – 1; 4. Misalkan f( x ) dan g( x ) adalah fungsi – fungsi yang terdiferensialkan dan k adalah sembarang  konstanta, maka :

′= k f ′( x )

(i)(k f ) ( x )

′

(ii)(f g) ( x )

±= f ′( x ) ±g′( x )

′= f( x )g′( x ) + f ′( x )g( x )

(iii)(f g) ( x ) 

f′

′ − ′, dimana g( x ) ≠ 0. 

⎜⎜⎝⎛= g ( x ) 

⎟⎟⎠⎞

(iv)( x ) g

Contoh 3 :

g( x ) f ( x ) g ( x ) f( x ) 2 

Tentukan turunan dari masing – masing fungsi berikut : a. f( x ) = -x4 + 3x 2- 6x + 1

b. g( x ) = ( 3x 2 + 2x )( x 4- 3x + 1)

KALKULUS I-ILKOM 2

2

x 2x 5

− +

c. y = x 2x 3 

2

Jawab :

+ − 

a.f ′( x ) = - 4x 3 + 6x - 6

b.g′( x ) = ( 3x 2 + 2x )( 4x 3 – 3 ) + ( 6x + 2)( x 4- 3x + 1)

 = 18x 5 + 10x 4 - 27x 2 - 6x + 2

2

4 ( x 4x 1)

− −

c.dxdy= 2 2

( x 2x 3 )

+ −

**1.2 Latihan Terstruktur 5a**

Untuk soal 1 – 5 tentukan dxdydari setiap fungsi yang diberikan.

1. y = 3x 7- 9x 2 + 21

2. y = ( -3x + 2) 2

3. y = ( x 2 + 17)( x 3- 3x + 1)

2

5x 3x 6

+ −

4. y = 3x 1

−

2

2x 3x 1

− +

5. y = 2x 1

+

6. Carilah semua titik pada grafik y = 1/ 3x 3 + x 2- x sedemikian sehingga garis singgung  mempunyai gradien 1.

7. Terdapat dua garis singgung pada kurva y = 4x – x 2 yang melalui titik (2, 5). Carilah persamaan  garis tersebut.

8. Jika f( x ) = ⎪⎩⎪⎨⎧=≠

2 1

x sin , jika x 0

x

0, jika x 0

Selidiki apakah f ′( x ) ada ?

**1.3 Turunan Beberapa Jenis Fungsi**

Turunan Fungsi Trigonometri

Dx sin x = cos x

Dx cos x = - sin x

Dx tan x = sec 2 x

Dx cot x = - csc 2 x

Dx sec x = tan x sec x

Dx csc x = - ctg x csc x

**Aturan Rantai**

Misalkan y = f( u ) dan u = g( x ) menentukan suatu komposisi fungsi y = f(g( x )) = (f ο g)(  x ). Jika g terdiferensial di x dan f terdiferensial di u = g( x ), maka fungsi f ο g terdiferensial di x dan  berlaku :

(f ο g)’( x ) = f ′( g( x ) )g′( x )

Dengan notasi Leibniz dituliskan sebagai :

dy

dy= dxdu 

dx

du 

KALKULUS I-ILKOM 3

Contoh 4 :

Tentukan dxdyuntuk setiap fungsi berikut :

1. y = ( x 3- 2x ) 12 2. y = cos 3( x 2 + 1)

Jawab :

1.dxdy= 12( x 3 – 2x )11( 3x 2 – 2 )

2.dxdy= 3 cos 2( x 2 + 1) (- sin ( x 2 + 1)) ( 2x )

 = - 6x cos 2( x 2 + 1) sin( x 2 + 1)

**Turunan Fungsi Implisit**

Bila hubungan fungsi ditulis dalam bentuk implisit F(x , y) = 0, maka anggaplah ada suatu  hubungan fungsional dari x ke y, yaitu y = f( x ), lalu F(x , y) didiferensialkan terhadap x. Contoh 5 :

1. x3 – 3x 2y + 19xy = 0, diferensialkan kedua ruas terhadap x :

3x 2 – ( 6x y + 3x 2dxdy) + 19y + 19x dxdy= 0

3x 2- 6xy + (19x – 3x 2) dxdy+ 19y = 0

maka dxdy= 22

6 19 3

*xy y x*

− −

19 3

*x x*

−

2. Carilah gradien garis singgung kurva x 2 + y 2 = 25 di x = 3.

Jawab : Dengan pendiferensialan implisit diperoleh :

2x + 2ydxdy= 0, maka dxdy= -x / y. Untuk x = 3, maka y = ± 4. Jadi gradien garis singgung  adalah : m1 – ¾ dan m2 = ¾.

**Turunan Fungsi Invers**

Bila fungsi y = f( x ) mempunyai invers , sebut saja x = g( y ), maka turunan masing – masing  saling berbalikan. Pernyataan ini dapat dijelaskan sebagai berikut : Jika kedua ruas dari x = g( y )  diturunkan terhadap x, maka diperoleh : 

dg( y )

1 = dy

Contoh 6 :

dy= dydxdxdy, maka dxdy=  dx

1atau dydx=

dx

dy

1

dy dx 

Misalkan y = x 2 dengan Df = [ 0, ∞ ]. Tentukan dydx

Jawab :

Fungsi ini mempunyai invers x = y, maka dydx= 2x1

**Turunan Fungsi Bentuk Parameter**

Misalkan fungsi dari x ke y disajikan dalam bentuk parameter sebagai berikut : ⎩⎨⎧==

x f( t )dengan t adalah parameter.

y g( t )

KALKULUS I-ILKOM 4

Anggapa bahwa f mempunyai invers, yaitu t = h( x ), maka fungsi dari x ke y dapat dinyatakan dalam  komposisi y = g(h( x )). Dengan aturan rantai maka diperoleh :

dy

dy=  

dy= dxdt

dt 

Contoh 7 :

dx

dt

dx dt 

Tentukan dxdydari fungsi parameter berikut : ⎪⎨⎧= +

x t 1/ t 2 2

= + 

⎪⎩

Jawab :

y t 1/ t

t 1

− 

dx= 34

*t* −dan dtdy= 2t t

2

t (t 1) − 

dt

2( 1) *t*

t −1sehingga dxdy=

2t t

4

2( 1) *t* −

= 4 (t 1) t

4

− 

3

*t*

**1.4 Latihan Terstruktur 5b**

1. Tentukan dxdyuntuk fungsi – fungsi berikut :

2 3

(x 1) 

sin x

a. y = sin x cos x

tan x

− 

+b. y = sin x cos x

−e. y = 3 2

(4x 5)

−

3 1

⎜⎝⎛+−

*x*f. y = sin t tan( t 2 + 1)

c. y = sin 2 x - cos 2 x d. y = sin⎟⎠⎞

2 5

*x*

2. Carilah persamaan garis singgung pada kurva y = ( x 2 + 1) 3( x 4 + 1) 2 pada titik ( 1, 32 ). 3. Koordinat posisi sebuah partikel yang bergerak setelah t detik ditentukan oleh persamaan  berikut :

⎩⎨⎧==

x 4 cos 2t

y 7 sin 2t

Tentukan dxdy

4. Carilah persamaan garis singgung pada kurva x 2y 2 + 3xy = 10y di titik ( 2, 1 ). 5. Tentukan dxdyuntuk fungsi 6x - 2xy + xy 3 = y 2

**5.5 Turunan Tingkat ke – n**

Jika fungsi f diturunkan terhadap x maka diperoleh f ′yang disebut turunan pertama dari f.  Jika f ′diturunkan lagi terhadap x, maka diperoleh f ′′yang disebut turunan kedua dari f. Jika proses  ini dilakukan n kali tetrhadap f ( jika dimungkinkan ), maka diperoleh turunan ke n yang ditulis ( n )

f .

Dalam notasi Leibniz dituliskan sebagai berikut :

f ′( x ) = dxdy; 

⎜⎝⎛dxdy

2

d y; 

d= 2

f ′′( x ) = ⎟⎠⎞ 

Μ

dx

dx 

KALKULUS I-ILKOM 5

f( x ) = ⎟⎟⎠⎞ ⎜⎜⎝⎛n -1

n -1

n

d y 

( n )

d= n d y 

Contoh 8 :

dx

dx

dx 

Misalkan f( x ) = x 5- 4x 3, maka : f ′( x ) = 5x 4 – 12x 2, f ′′( x ) = 20x 3 – 24x, f ′′′( x ) = 60x 2- 24, (4) f( x ) = 120 x , dan (5) f( x ) = 120.

**Turunan kedua Bentuk Implisit**

Contoh 9 :

2

d yuntuk fungsi 4x 3- xy 2- 4 = 0

Tentukan 2

dx

Jawab :

Jika kedua ruas didiferensialkan terhadap x, maka diperoleh :

12x 2 – y2 – 2xy dxdy= 0 (1) 12x y2

−, diferensialkan lagi ( 1 ) terhadap x, diperoleh :

Jadi dxdy= 2xy

2

24x – 2ydxdy- 2ydxdy- 2x (dxdy)2 - 2xy 2

d y= 0

dx

2

Dengan mensubstitusi dxdyyang sudah diperoleh, lalu mengelurkan 2

d y, maka :

dx

3y 4x y 4x 4 2 2 4

2

+ −

d y= y 

dx

2 

**Kecepatan Sesaat**

Andaikan sebuah partikel P bergerak sepanjang garis lurus dimana posisinya pada saat t  diberikan oleh s = f( t ), maka untuk selang waktu sebesar h posisinya adalah f( t + h ). Jadi  kecepatan rata – rata partikel pada selang waktu h adalah :

f(t + h) − f( t )

Vrata – rata = h

Kecepatan sesaat t adalah : 

V( t ) =

f(t + h) − f( t )= dtds

*Lim*h

*h*→0 

Jadi kecepatan sebuah benda yang bergerak dengan fungsi jarak s = f( t ) adalah turunan pertama  dari s terhadap t. Jika V( t ) diturunkan lagi terhadap t, akan menghasilkan besaran yang disebut  percepatan. Jadi percepatan adalah :

dV( t )= 22 

a( t ) = dt

Contoh 10 :

d s dt 

Misalkan sebuah partikel bergerak dengan fungsi jarak s = ½ t 4 - 5t 3 + 12t 2, tentukan  kecepatan dan percepatan benda tersebut.

Jawab :

kecepatan : V( t ) = dtds= 2t 3 – 15t 2 + 24t

KALKULUS I-ILKOM 6

Percepatan : a( t ) = 22

d s= 6t 2 – 30t + 24

dt

Contoh 11 :

Posisi dua partikel P1 dan P2 yang bergerak pada garis lurus masing – masing diberikan  oleh s1( t ) = 3t 3 + 12t 2 + 18t + 5 dan s2( t ) = -t 3 + 9t 2 – 12t. Tentukan waktu sedemikian sehingga  kedua partikel bergerak dengan kecepatan yang sama.

Jawab :

ds1= dt 

Kecepatan kedua partikel sama jika dan hanya jika dt

ds2, jadi waktu saat kecepatan  

kedua partikel sama adalah penyelesaian dari persamaan 9t 2 + 24t + 18 = -3t 2 + 18t - 12, atau  2t 2 – 7t + 5 = 0. Akar – akar dari persamaan kuadrat ini adalah t1 = 5/2 atau t2 = 1.

**Laju – Laju Yang Berkaitan**

Jika perubah y bergantung pada t, maka dtdydisebut laju perubahan sesaat. Dalam  aplikasinya sering dijumpai suatu persoalan dimana perubah y bergantung dari perubah x, selain itu dxjuga diketahui. Dengan pendiferensialan implisit dtdyjuga diperoleh. Persoalan ini disebut laju

dt

– laju yang berkaitan.

Contoh 12 :

Sebuah balon dilepas pada jarak 150 m dari seorang pengamat yang berdiri di tanah. Jika  balon bergerak ke atas secara lurus dengan laju 8 m/dt, berapa laju pertambahan jarak antara balon  dengan pengamat ditanah pada waktu balon pada ketinggian 50 m ?

Jawab :

Persoalan ini dapat digambarkan sebagai berikut :

s = jarak balon ke pengamat setelah t detik  

h

s 150

balon dilepas.

h = ketinggian setelah t detik balon dilepas.

m

*Gambar 3*

Bersaran – besaran s dan h akan berubah jika t berubah. Sedangkan jarak mendatar 150m adalah  tetap. Diketahui dtdh= 8 m/dt, akan dicari dtdspada saat h = 50 m. Berdasarkan rumus Pythagoras  :

s2 = h 2 + ( 150 ) 2, dengan diferensial implisit : 2sdtds= 2hdtdh, maka dtds= shdtdh. Pada saat h =  50= 108m/dt.

150 + 50= 5010m, sehingga dtds= 8 

50 m, maka s = 2 2 **Nilai Ekstrim Fungsi**

50 10 

Nilai ekstrim adalah nilai maksimum atau nilai minimum dari suatu fungsi. Nilai ekstrim  fungsi ada dua yaitu ekstrim mutlak dan ekstrim relatif, ada juga yang menyebutnya sebagai ekstrim  lokal dan ekstrim global.

KALKULUS I-ILKOM 7

Definisi :

Misalkan f merupakan fungsi yang terdefinisi pada selang I.

a. Jika c suatu titik pada I sedemikian hingga f ′( c ) = 0, maka c disebut titik stasioner. b. Jika c suatu titik pada I sedemikian hingga f ′( c ) tidak ada, maka c disebut titik  singular.

Jadi berdasarkan Definisi ini titik stasioner diperoleh dari penyelesaian persamaan f ′( x ) = 0. Nilai  ekstrim sering terjadi pada ujung – ujung selang, pada titik stasioner, dan pada titik singular. Ketiga  titik ini disebut titik kritis.  

Maks

Min

Titik – titik

ujung

Teorema :

• Maks

• Min

Titik – titik

stasioner

*Gambar 4*

Titik – titik singular

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang I dengan c ∈ I. Jika f( c ) merupakan nilai ekstrim,  maka c haruslah titik kritis, yaitu c berupa salah satu dari :

1. Titik ujung dari I ;

2. Titik stasioner dari f ;

3. Titik singular dari f.

Dengan Teorema ini, maka prosudur sederhana untuk mencari nilai maksimum atau nilai minimum  dari fungsi f yang kontinu pada selang tertutup I adalah :

1. Cari titik kritis pada f ;

2. Hitung nilai f pada setiap titik kritis dari langkah 1, lalu bandingkan nilai – nilai yang diperoleh. Nilai yang terbesar adalah nilai maksimum dan yang terkecil adalah nilai minimum.

Contoh 13 :

Jika f( t ) = 4t 3 + 3t2 – 6t + 1, selang I = [ -2 , 1 ]. Tentukan titik – titik kritis dan tentukan  nilai maksimum dan minimumnya.

Jawab :

Titik stasioner adalah penyelesaian dari persamaan :

f ′( t ) = 0 , jika dan hanya jika 12t 2 + 6t - 6 = 0. Dengan membagi setiap suku dengan 6 lalu  memfaktorkannya, maka diperoleh akar – akar persamaan kuadrat t = ½ atau t = - 1. Titik – titik  kritisnya dalah : -2, -1, ½, 1. dari titik – titik kritis ini diperoleh : f( -2 ) = -7, f( 1 ) = 2, f( ½ ) = -3/4  dan f( -1 ) = 6. Jadi nilai maksimumnya adalah 6 dan nilai minimumnya adalah – 7.

Contoh 14 :

KALKULUS I-ILKOM 8

Sebuah kotak terbuat dari selembar kertas kartoon berbentuk persegi panjang, panjang  kertas 24 cm dan lebar 9 cm. Kotak dibuat dengan memotong bujur sangkar identik pada keempat  pojok dan melipat keatas sisi – sisinya seperti pada gambar berikut. Tentukan ukuran kotak

sedemikian sehingga volumenya maksimum. Berapa volume kotak tersebut ?

*Gambar 5*

Jawab :

Misalkan panjang potongan adalah x cm, maka ukuran kotak tersebut adalah :

panjang = 24 – 2x, lebar = 9 – 2x dan tinggi = x, sehingga volume kotak adalah : V( x ) = ( 24 – x )( 9 - 2x ) x = 216x – 66x 2 + 4x 3, dimana 0 ≤ x ≤ 4,5

Titik stasioner :

dV(x)= 216 – 132x + 12x 2 = 0, jika dan hanya jika x = 9 atau x = 2. Karena 9 ∉ [ 0 , 4,5  dx

], maka 9 gagal sebagai titik kritis. Jadi titik – titik kritisnya adalah : 0, 2, dan 4,5. Volume kotak  yang dicapai oleh ketiga titik kritis in adalah : V( 0 ) = 0, V( 2 ) = 200 dan V( 4,5 ) = 0. Sehingga  volume

maksimum kotak adalah 200 cm3 yang dicapai bila x = 2 cm dan volume minimum adalah 0 cm3 yan  tercapai bila x = 0 atau 4,5 cm ( setengah lebar kertas ).

Contoh 15:

Seorang peternak mempunyai kawat sepanjang 200 m. Kawat tersebut digunakan untuk  memagari halaman berbentuk persegi panjang. Jika peternak ingin luas halaman yang terpagari  maksimum, tentukan ukuran pagar tersebut.

Jawab :

Andaikan lebar halaman x m dan panjangnya y m, maka berlaku :

2x + 2y =200, maka y = 100 – x.

Luas halaman yang terpagari adalah :

L = xy = x ( 100 – x ) = 100x – x2 dengan 0 ≤ x ≤ 100

dL= 100 - 2x = 0, maka x = 50.

dx

Jadi titik kritis adalah : 0, 50, dan 100. Selanjutnya L( 0 ) = 0, L( 100 ) = 0 dan L( 50 ) = 2500. jadi  luas maksimum adalah 2500 m2 yang terjadi jika ukuran pagar adalah 50 m x 50 m.

**5.6 Latihan Terstruktur 5c**

1. Diberikan fungsi parameter sebagai berikut : 

⎪⎨⎧==

2

⎪⎩

x a t

cos

2

y b t sin

2

d x

Tentukan 2 dy

KALKULUS I-ILKOM 9

2. x+ y= a, tentukan dydx 3. y = x 3 + 3y 2- 2x – 8, tentukan dxdy 2

d y

4. x3y + y 3x = 10, tentukan 2 dx

2 

5. y = 3 2

1

d y

, tentukan 2 

x x sin

dx 

6. Tentukan titik – titik kritis fungsi – fungsi berikut.

a. f( x ) = x 3- 3x + 1 ; dan I = [ -3/4 , 3 ] ;

1

b. g( x ) = 2

+; dan *=* ( -∞ , ∞ ) ;

1 x

c. F( t ) = sin t – cos t ; dan I = [ 0 , π ] ;

7. Dua pojok sebuah siku empat berada pada sumbu X dan dua pojok yang lain berada pada  parabola y = 12 – x2; y ≥ 0 seperti tampak pada gambar 6. Berapa ukuran siku empat tersebut  agar luasnya maksimum.

**Gambar 6**

8. Sebuah benda dilemparkan keatas sehingga ketinggiannya adalah h( t ) = -16t 2 + 48t + 256  m setelah t detik.

a. Berapa kecepatan awalnya ?

b. Kapan ketinggian maksimum tercapai ?

c. Kapan benda membentur tanah ?

d. Berapa kecepatan pada saat membentur tanah ?

KALKULUS I-ILKOM 10